УДК 519.688:511

В. С. Малаховский

О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ В СТРОЕНИИ ПОДМНОЖЕСТВ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Показано, что первая четверка простых чисел 2, 3, 5, 7 порождает конечные подмножества простых чисел, допуская принцип взаимозаменяемости. Установлено, что любое простое число p ($11 \leqslant p \leqslant 41$, $p \neq 19$), сложенное с двумя предшествующими простыми числами, порождает простое число и любое простое число p ($5 \leqslant p \leqslant 31$, $p \neq 13$), сложенное с двумя последующими простыми числами, также порождает простое число.

It is shown that the first four primes 2, 3, 5, 7 generate finite subsets of primes, assuming the principle of interchangeability. In is established that any prime p($11 \leqslant p \leqslant 41$, $p \neq 19$), added together with two preceding primes generates a prime and that any prime p ($5 \leqslant p \leqslant 31$, $p \neq 13$), added together with two consequent primes generates also a prime.

Ключевые слова: простое число, подмножество, взаимозаменяемость.

Key words: prime, subset, interchangeability.

1. Немного истории

С момента возникновения понятия «простое число» прошли тысячелетия. Многие выдающиеся ученые, убежденные в исключительной роли в математике множества простых чисел, занимались их исследованием. Еще в Древней Греции Евклид доказал бесконечность множества P простых чисел, а Эратофен с помощью своего знаменитого «решета» установил способ отыскания последовательно возрастающих простых чисел. Начиная с XVIII в. выдающиеся математики (Ф. Гаусс, Л. Эйлер, П. Л. Чебышев, Ж. Адамар, Валле-Пуссен, И. М. Виноградов и др. [1; 2; 4]) исследовали вопрос о числе $\pi(n)$ простых чисел, не превосходящих заданного натурального числа n. Л. Эйлер доказал, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(n)}{n}=0$, то есть установил, что простых чисел на порядок меньше, чем всех натуральных чисел. Уже в XIX в. был окончательно установлен «асимптотический закон распределения простых чисел»:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(n)}{n/\ln n}=1.$$

Удалось доказать расходимость ряда $\sum\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{p}$ и сходимость ряда обратных простых чисел-близнецов (Л. Эйлер). Были даны приближенные оценки числа простых чисел в сегменте $[n, n+a]$ и длины сегмента «пробелов» (не содержащих ни одного простого числа) [4] и получен ряд других важных результатов [4—6]. Однако попытки обнаружить закономерности в строении множества P до сих пор не увенчались успехом. Большинство математиков высказало мнение, что никаких закономерностей в строении множества P не существует. Так ли это на самом деле?

2. Закономерность, порожденная первой четверкой простых чисел

По легенде первые четыре простых числа 2, 3, 5, 7 возникли так: 2 — «женское начало», 3 — «мужское начало», 5 — «их потомство» $(2+3=5)$. Что касается 7, то, по-видимому, особая роль этого числа в Древнем мире и обусловила тот факт, что оно стало простым.

Оказывается, что существует закономерность, построенная на принципе взаимозаменяемости, позволяющая из этой четверки простых чисел получать (без пропусков!) новые простые числа.

Рассмотрим формулы

$$p+q2^{2n-1},\ pq+2^{2n-1},\ pq+r2^{2n-1},\ 2p+q, \tag{1}$$

где $n=1,\ 2,\ 3$; $p,\ q,\ r$ — любые попарно различные числа из множества $\{3, 5, 7\}$. Исследование подмножеств (1) показывает, что каждое из них состоит из тройки простых чисел, а последнее — из четверки. Действительно, подставляя в формулах (1) вместо p, q, r любые попарно различные числа из множества $\{3, 5, 7\}$, убеждаемся, что числа

$$3+5\cdot 2^{2n-1},\ 3+7\cdot 2^{2n-1},\ 5+3\cdot 2^{2n-1},\ 5+7\cdot 2^{2n-1},\ 7+3\cdot 2^{2n-1},\ 7+5\cdot 2^{2n-1},$$

$$3\cdot 5+2^{2n-1},\ 3\cdot 7+2^{2n-1},\ 5\cdot 7+2^{2n-1},$$

$$3\cdot 5+7\cdot 2^{2n-1},\ 3\cdot 7+5\cdot 2^{2n-1},\ 5\cdot 7+3\cdot 2^{2n-1},$$

$$6+5=11,\ 6+7=11,\ 10+3=13,\ 10+7=17,\ 14+3=17,\ 14+5=19$$

при $n=1,\ 2,\ 3$ являются различными подмножествами, состоящими из трех простых чисел.

Случайностью это быть не может. Значит — закономерность. Вот эти двенадцать троек простых чисел и одна последовательная четверка:

$$\begin{gathered}\{13, 43, 163\}, \{17, 59, 227\}, \{11, 29, 101\}, \{19, 61, 229\},\\ \{13, 31, 103\}, \{17, 47, 167\}, \{17, 23, 47\}, \{23, 29, 53\}, \{37, 43, 67\},\\ \{29, 71, 239\}, \{31, 61, 181\}, \{41, 59, 131\}, \{11, 13, 17, 19\}.\end{gathered} \tag{2}$$

Анализируя числа (2), видим, что они содержат все двузначные простые числа до 71 включительно. Кроме того, они включают девять трехзначных простых чисел: 101, 103, 131, 163, 167, 181, 227, 229, 239.

3. Об одном способе построения подмножеств простых чисел

Для простых чисел справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого простого числа p ($5\leqslant p\leqslant 31$, $p\neq 13$) сумма его с двумя последующими ему простыми числами является простым числом.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}5+7+11=23,\ 7+11+13=31,\ 11+13+17=41,\ 17+19+23=59,\\ 19+23+29=71,\ 23+29+31=83,\ 29+31+37=97,\ 31+37+41=109.\ \square\end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 2. *Для любого простого числа p ($11\leqslant p\leqslant 41$, $p\neq 19$) сумма его с двумя предшествующими ему простыми числами являются простым.*

Доказательство. Читая суммы (3) справа налево, убеждаемся в справедливости теоремы для чисел 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41. □

Метод сложения простого числа p с последующими или предшествующими ему двумя простыми числами можно использовать для нахождения ряда новых простых чисел.

Например, складывая с числом 11 любые два числа из троек простых чисел {5, 7, 13}, {13, 17, 19}, получим две тройки последовательных простых чисел {23, 29, 31}, {41, 43, 47}. Складывая с числами 19, 53 и 71 любые два числа и из троек последовательных простых чисел {23, 29, 31}, {59, 61, 67}, {73, 79, 83}, получим тройки {71, 73, 79}, {173, 179, 181}, {223, 227, 233} также последовательных простых чисел. Сумма любых трех простых чисел из совокупности {29, 31, 37, 41} дает четверку почти последовательных простых чисел: {97, 101, 107, 109}.

Заметим, что в результате проделанных в работе операций найдены все двузначные простые числа, кроме 89, которое можно вычислить, используя другие закономерности (см. п. 4 этой работы).

4. О некоторых других закономерностях

Свойство взаимозаменяемости выполняется и в ряде других формул, например

$$3p+q2^{2n-1}\ (\{5,7\}, n=1,2,3),\ 5p+q2^{2n-1}\ (\{3,7\}, n=1,2,3),\ 2^2p+q\ (\{3,5\},\{3,7\}),$$
$$7^2p+q2^{2n-1}\,(p=7, q=5, n=1,2),\ 3^2p+q2^{2n-1}\,(\{5,7\}, n=1,2,3),\ 2\cdot 3p+q\ (\{5,7,11\}),$$
$$10^n+p^2\ (\{3,7,13,31,37,43,63,73\}, n=1;\ \{3,7,31,97\}, n=2;$$
$$\{13,19,31,61,97\}, n=3;\ \{7,37,61,67,79,83\}, n=4).$$

Получаем, соответственно, подмножества простых чисел:

{29, 71, 239}, {31, 61, 181}, {41, 59, 131}, {17, 23}, {19, 31},
{353, 383, 503}, {59, 101, 269}, {73, 13, 223}, {37, 41}, {47, 53}, {71, 73}.

Для трехзначных простых чисел существуют только шесть простых чисел, сумма которых с двумя предыдущими дает простое число. Это 107, 127, 139, 149, 151, 167. Имеем

$$107+103+101=311,\ 127+113+109=349,\ 139+131+127=397,$$
$$149+139+131=419,\ 151+149+139=439,\ 167+163+157=487.$$

Прочитывая эти суммы справа налево, убеждаемся, что числа 101, 109, 127, 131, 139, 157 при сложении с двумя последующими простыми числами дают простое число.

Можно найти числа и среди достаточно больших простых чисел, сумма которых с двумя предшествующими дает простое число. Например, числа 2131, 3121, 19 387, 89 273, 101 117 обладают этим свойством. Действительно,

$$2131+2129+2113=6373,\ 3121+3119+3109=9349,$$
$$19\,387+19\,381+19\,379=58\,147,\ 89\,273+89\,269+89\,261=267\,803,$$
$$101\,117+101\,113+101\,111=303\,341.$$

Однако это уже случайная выборка соответствующего простого числа, а не закономерность.

Выбирая в формулах (1) значения p, q, r из простых чисел {3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}, можно значительно расширить возникающие подмножества простых чисел.

Например, подставляя в формулу $p+q2^{2n-1}$ числа 3 и 13, получим

$3+13\cdot 2^{2n-1}$, {29, 107, 419}, $n=1, 2, 3$; $13+3\cdot 2^{2n-1}$, {19, 37, 109}, $n=1, 2, 3$;

числа 3 и 17:

$3+17\cdot 2^{2n-1}$, {37, 139, 547}, $n=1, 2, 3$; $17+3\cdot 2^{2n-1}$, {23, 41, 113}, $n=1, 2, 3$;

числа 5 и 13:

$5+13\cdot 2^{2n-1}$, {31, 109, 421, 1669, 6661}, $n=1, 2, 3, 4, 5$;

$13+5\cdot 2^{2n-1}$, {23, 53, 173, 653}, $n=1, 2, 3, 4$;

числа 5 и 19:

$5+19\cdot 2^{2n-1}$, {43, 157, 613, 2437, 9733, 38917}, $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$;

$19+5\cdot 2^{2n-1}$, {29, 59, 179, 659, 2579, 10259}, $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Подставляя в формулу $pq+2^{2n-1}$ числа 3 и 13, 3 и 17, получим, соответственно, подмножества {41, 47, 71, 167}, {53, 59, 83, 179, 563}. Подставляя в формулу $2p+q$ два числа из {3, 5, 13}, получим {11, 13, 19, 23, 29, 31}.

По-видимому, для трехзначных простых чисел существуют другие правила и другие закономерности их построения. А существуют ли они вообще? Вопрос остается открытым. Но лично я убежден в том, что множество P простых чисел таит в себе еще много неизвестных тайн.

Так как современные компьютеры мгновенно определяют, является ли данное натуральное число простым или нет, то можно надеяться, что многие из этих тайн будут раскрыты.

Список литературы

1. *Боро, Цагир Д., Рольфе Н. и др.* Живые числа. М., 1985.
2. *Трост Э.* Простые числа. М., 1985.
3. *Малаховский В. С.* Эти загадочные простые числа : в 2 ч. Калининград, 1998—1999.
4. *Малаховский В. С.* Числа знакомые и незнакомые. Калининград, 2004.
5. *Малаховский В. С., Малаховский Н. В.* О компьютерном моделировании некоторых числовых систем и дискретных семейств пифагоровых треугольников // Вестник Калининградского государственного университета им. И. Канта. 2003. №3. С. 39—46.
6. *Малаховский В. С.* Подмножества простых чисел в обобщенных арифметических прогрессиях // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2011. №10. С. 25—28.
7. *Малаховский В. С.* Удивительные свойства первой четверки простых чисел // VIII международная заочная научно-практическая конференция. Естественные и математические науки в современном мире. Новосибирск, 2013. С. 25—28.

Об авторе

Владислав Степанович Малаховский — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: nikolaymal@mail.ru

About the author

Prof. Vladislav Malakhovsky — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: nikolaymal@mail.ru